* تمرين: ليكن A جبر لي فوق الحلقة R وليكن $a \in A$

التطبيق $d_a : A \to A$

المعرف بالشكل:

$$\forall x \in A : d_a(x) = [a, x]$$

هو تطبيق اشتقاق على A

البرهان:

- إن d_a تطبيق:

$$\forall x, y \in A : x = y$$

$$[a, x] = [a, y] \quad \text{لأن } [\,,\,] \text{ تطبيق}$$

$$\Rightarrow d_a(x) = d_a(y)$$

- 1) $\forall x, y \in A ; d_a(x+y) = [a, x+y]$

$$= [a, x] + [a, y] = d_a(x) + d_a(y)$$

2) $\forall \alpha \in R \; ; d_a(\alpha x) = [a, \alpha x] = \alpha [a, x] = \alpha d_a(x)$

3) $d_a([x, y]) = [a, [x, y]] = [d_a(x), y] + [x, d_a(y)]$

لأن:

لدينا: $[a, [x, y]] + [x, [y, a]] + [y, [a, x]] = 0$

$$[a, [x, y]] = -[x, [y, a]] - [y, [a, x]]$$

$$= [[a, x], y] - [x, [a, y]] = [[a, x], y] + [x, [a, y]]$$

$$= [d_a(x), y] + [x, d_a(y)].$$

تمهيد: لأجل أي جبر لي فوق الحلقة R فإن مجموعة تطبيقات الاشتقاق ليست خالية.
لأن $0 \in A$ وبالتالي $d_0 \in Der(A)$

* تمهيد: ليكن A جبر لي فوق الحلقة $\mathbb{R}$ لنعرف على المجموعة $Der(A)$ العمليات الآتية:

-1- $+ : Der(A) \times Der(A) \longrightarrow Der(A)$
$(d_1, d_2) \longmapsto d_1 + d_2$

$Der(A)$ تشكل زمرة بالنسبة للعمليتين؟

-2- $\cdot : R \times Der(A) \longrightarrow Der(A)$
$(\alpha, d) \longmapsto \alpha d$

والبرهان:

$$d_1 + d_2 : A \longrightarrow A$$
$$\forall x \in A ;\ (d_1 + d_2)(x) = d_1(x) + d_2(x)$$

1) $\forall x, y \in A ;\ (d_1 + d_2)(x + y) = d_1(x + y) + d_2(x + y)$

$$= d_1(x) + d_1(y) + d_2(x) + d_2(y)$$

$$= (d_1 + d_2)(x) + (d_1 + d_2)(y)$$

2) $\forall \alpha \in R ;\ (d_1 + d_2)(\alpha x) = d_1(\alpha x) + d_2(\alpha x)$

$$= \alpha d_1(x) + \alpha d_2(x) = \alpha[d_1(x) + d_2(x)]$$
$$= \alpha (d_1 + d_2)(x)$$

3) $\forall x, y \in A ;\ (d_1 + d_2)([x, y]) = d_1([x, y]) + d_2([x, y])$

الموضوع:

$$= [d_1 x, y] + [x, d_1 y] + [d_2 x, y] + [x, d_2 y]$$

$$= [d_1 x + d_2 x, y] + [x, d_1 y + d_2 y]$$

$$= [(d_1 + d_2)(x), y] + [x, (d_1 + d_2)(y)]$$

وهذا يعني أن: $d_1 + d_2$ هو تطبيق اشتقاق على A.

وبالتالي $d_1 + d_2 \in Der(A)$.

تمت البرهان أثبت أن $(Der(A), +)$ زمرة تبديلية وقوية

$$\alpha \cdot d : A \longrightarrow A$$

$$\forall x \in A ; \quad \alpha \cdot d(x) \longmapsto = \alpha \cdot d(x)$$

- $\forall x, y \in A ; (\alpha d)(x + y) = \alpha d(x + y) = \alpha (d(x) + d(y))$

$$= \alpha \cdot d(x) + \alpha \cdot d(y) = (\alpha d)(x) + (\alpha d)(y)$$

- $\forall \beta \in R ; (\alpha d)(\beta x) = \alpha (d(\beta x)) = \alpha (\beta d(x))$

$$= (\alpha \beta) d(x) = (\beta \alpha) d(x) = \beta \cdot (\alpha \cdot d(x))$$

$$= \beta (\alpha d)(x)$$

$$(\alpha d)([x, y]) = \alpha (d[x, y]) = \alpha ([dx, y] + [x, dy])$$

$$= \alpha [d(x), y] + \alpha [x, d(y)] = [\alpha d(x), y] + [x, \alpha d(y)]$$

$= [(\alpha d)(x), y] + [x, (\alpha d)(y)]$

إذاً αd تعريف اشتقاق على A.

تمرين: التحقق من شروط الأولى و الخطية.

مما سبق نجد أن $Der(A)$ هي مودول فوق R.

*مبرهنة: ليكن A جبر لي طوبولوجي فوق R، المجموعة $Der(A)$ تشكل جبر لي فوق R بالنسبة لعملية الضرب

$$[\ ,\ ] : Der\,A \times Der(A) \longrightarrow Der\,A$$
$$(d_1, d_2) \longmapsto [d_1, d_2]$$

حيث

$$[d_1, d_2] = d_1 d_2 - d_2 d_1$$

البرهان.

$$[d_1, d_2](x+y) = d_1 d_2 (x+y) - d_2 d_1 (x+y)$$

$$= d_1(d_2(x+y)) - d_2(d_1(x+y))$$

$$= d_1(d_2(x) + d_2(y)) - d_2(d_1(x) + d_1(y))$$

$$= d_1 d_2(x) + d_1 d_2(y) - d_2 d_1(x) + d_2 d_1(y)$$

$$= (d_1 d_2)(x) + (d_1 d_2)(y) - (d_2 d_1)(x) - (d_2 d_1)(y)$$

$$= (d_1 d_2)(x) - (d_2 d_1)x + (d_1 d_2)(y) - d_2 d_1(y)$$

$$= [d_1, d_2](x) + [d_1, d_2](y)$$

الموضوع : ....

$\bullet\ \forall \alpha \in R, \forall x \in A$; $[d_1, d_2](\alpha x) = (d_1 d_2 - d_2 d_1)\alpha x$

$= d_1 d_2(\alpha x) - d_2 d_1(\alpha x) = d_1(d_2(\alpha x)) - d_2(d_1(\alpha x))$

$= d_1(\alpha d_2(x)) - d_2(\alpha d_1(x)) = \alpha d_1(d_2(x)) - \alpha d_2(d_1(x))$

$= \alpha(d_1 d_2)(x) - \alpha d_2 d_1(x) = \alpha[d_1, d_2](x)$

$\bullet\ [d_1, d_2]([x, y]) = (d_1 d_2 - d_2 d_1)([x, y])$

$= d_1 d_2([x, y]) - d_2 d_1([x, y]) = d_1(d_2[x, y]) - d_2(d_1[x, y])$

$= d_1([d_2(x), y] + [x, d_2(y)]) + d_2([d_1(x), y] + [x, d_1(y)])$

$= d_1([d_2(x), y]) + d_1([x, d_2(y)]) - d_2([d_1(x), y]) - d_2([x, d_1(y)])$

$= [d_1 d_2(x), y] + \underline{[d_2(x), d_1(y)]} + \underline{[d_1(x), d_2(y)]} + [x, d_1 d_2(y)]$

$- [d_2 d_1(x), y] - \underline{[d_1(x), d_2(y)]} - \underline{[d_2(x), d_1(y)]} - [x, d_2 d_1(y)]$

$= [d_1 d_2(x), y] + [x, d_1 d_2(y)] - [d_2 d_1(x), y] - [x, d_2 d_1(y)]$

$\underline{[d_1 d_2(x), y] - [d_2 d_1(x), y]} + [$

$= [d_1 d_2(x) - d_2 d_1(x), y] + [x, d_1 d_2(y) - d_2 d_1(y)]$

$= [[d_1, d_2](x), y] + [x, [d_1, d_2](y)]$

الموضوع : .... / /

ومنه نجد أن $[d_1,d_2]$ تطبيق اشتقاق على A ((A) جبر لي)

لنبرهن على شروط جبر لي :

1) $\forall\ d \in DerA$; $[d,d] = dd - dd = 0$

2) $\forall\ d_1,d_2,d_3 \in DerA$; $[d_1+d_2,d_3] \overset{?}{=} [d_1,d_3]+[d_2,d_3]$

$$[d_1+d_2,d_3] = (d_1+d_2)d_3 - d_3(d_1+d_2)$$

$$= d_1d_3 + d_2d_3 - d_3d_1 - d_3d_2$$

$$= d_1d_3 - d_3d_1 + d_2d_3 - d_3d_2$$

$$= [d_1,d_3] + [d_2,d_3]$$

بنفس الطريقة نجد أن : $[d_1,d_2+d_3] = [d_1,d_2] + [d_1,d_3]$

3)

$$\forall \alpha \in R\ ;\ \alpha[d_1,d_2] = \alpha(d_1d_2 - d_2d_1)$$

$$= \alpha d_1d_2 - \alpha d_2d_1 = (\alpha d_1)d_2 - d_2(\alpha d_1)$$

$$= [\alpha d_1, d_2]$$

$$\alpha d_1d_2 - \alpha d_2d_1 = d_1(\alpha d_2) - (\alpha d_2)d_1$$

$$= [d_1, \alpha d_2$$

انتهت